

Εξετάσεις Ιουνίου 2024 - Αναλυτική Γεωμετρία

Διδάσκων Θ. Βλάχος

Θέμα 1

- (i) (05 μόρια) Αποδείξτε ότι η (εσωτερική) διχοτόμος της γωνίας \widehat{AOB} είναι παράλληλη προς το διάνυσμα

$$\frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|} + \frac{\vec{OB}}{\|\vec{OB}\|}$$

- (ii) (10 μόρια) Αποδείξτε ότι για τυχόντα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ του χώρου ισχύει:

$$[\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]^2.$$

- (iii) (05 μόρια) Να εξετάσετε αν ο παρακάτω ισχυρισμός είναι αληθής ή ψευδής (με πλήρη αιτιολόγηση).

« Αν \vec{a}, \vec{b} διανύσματα, τότε \vec{a}, \vec{b} είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ ».

Θέμα 2

Δίνονται οι ευθείες

$$(\varepsilon_1) : 2x - y - 3 = 0, \quad y + 2z + 1 = 0$$

$$(\varepsilon_2) : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$$

- (i) (10 μόρια) Να δείξετε ότι οι παραπάνω ευθείες είναι συνεπίπεδες και να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που τις περιέχει.
- (ii) (10 μόρια) Βρείτε τις εξισώσεις ευθείας η οποία είναι κάθετη και στην (ε_1) και στην (ε_2) . Πόσες τέτοιες ευθείες υπάρχουν;

Θέμα 3

- (i) (15 μόρια) Στο επίπεδο Oxy δίνεται καμπύλη (c) με εξίσωση

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 8.$$

Αφού αποδείξετε ότι πρόκειται για έλλειψη, να βρείτε μια κορυφή της καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της σε αυτή την κορυφή, ως προς το σύστημα Oxy .

- (ii) (05 μόρια) Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$, να βρεθεί η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου των σημείων του χώρου τα οποία απέχουν απόσταση 1 από τον άξονα Oy και να περιγραφεί γεωμετρικά.

Θέμα 4

Σε ορθογώνιο σύστημα $Oxyz$ δίνονται τα σημεία $A(1, 1, 1)$, $B(0, 0, 1)$ και $\Gamma(1, 1, 0)$.

- (i) (μόρια 05) Αποδείξτε ότι από τα σημεία A, B, Γ διέρχεται μοναδικό επίπεδο και να βρείτε την εξίσωσή του.
- (ii) (μόρια 05) Να βρείτε τις εξισώσεις της διχοτόμου (δ) της γωνίας \widehat{BAG} .

(iii) (μόρια 05) Να βρείτε τις εξισώσεις του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ . Πόσοι τέτοιοι κύκλοι υπάρχουν;

(iv) (μόρια 05) Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.

Θέμα 5

Δίνεται η σφαίρα $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ και η ευθεία (ε) με αναλυτικές εξισώσεις $x = 2, y = 2$.

(i) (10 μόρια) Να βρείτε όλα τα επίπεδα που περιέχουν την ευθεία (ε) και εφάπτονται της δοσμένης σφαίρας (S) .

(ii) (10 μόρια) Να βρείτε όλα τα επίπεδα που περιέχουν την ευθεία (ε) και τέμνουν τη σφαίρα (S) σε κύκλο ακτίνας 1.

- Διάρκεια εξέτασης **3 ώρες**.
- Μη τεκμηριωμένες απαντήσεις δεν λαμβάνονται υπόψη.
- Σοβαρά μαθηματικά λάθη θα επηρεάσουν αρνητικά τη βαθμολογία.

★ Καλή επιτυχία ★

Only Maths

-Official-